Wie schwer ist die Rippe?

Von JOACHIM GRABINSKI

In Beschreibungen von Glocken findet man häufig sprachliche Angaben zur verwendeten Rippe, in denen ihre Schwere zum Ausdruck gebracht werden soll. Wir finden Formulierungen wie beispielsweise „leicht“, „mittelschwer“ „schwer“, „sehr leicht“, „sehr schwer“, auch „besonders leicht“ oder „überschwer“. Sogar „normal“, „dick“ und „stark“ sind gelegentlich zu finden. Es soll hier nicht um eine vereinheitlichende Sprachregelung gehen, sondern vielmehr die zugrunde liegende Problematik anhand mathematischer Zusammenhänge beschrieben werden. Ferner wird eine Möglichkeit aufgezeigt, die Schwere der Rippe durch einen dimensionslosen Zahlenwert auszudrücken.

Schaut man sich einmal Rippentabellen unterschiedlicher Gießer an, wie sie beispielsweise von Walter [1] oder Weißenbäck/Pfundner [2] veröffentlicht wurden, dann lassen sich einige bemerkenswerte Beobachtungen machen: Erstens variieren die Tabellen in ihrer absoluten Lage, so dass die „leichte“ Rippe eines Gießers von den Werten her der „mittleren“ Rippe eines anderen nahe kommen kann. Zweitens variieren gelegentlich die Unterschiede zwischen z. B. mittlerer und schwerer Rippe, also die relative Lage der Rippentabellen. Drittens können Rippentabellen progressiv oder degressiv konstruiert sein, wodurch die Rippenschwere tonhoher Glocken absolut betrachtet größer bzw. kleiner ist als die Schwere tontiefer Glocken derselben Rippentabelle. Wenn nun in einer Dokumentation gesagt wird, die Rippe einer Glocke sei „schwer“, dann ist diese Aussage nie ganz eindeutig, denn sie kann a) auf der „offiziellen“ Angabe des Gießers, b) auf Sachverstand und Gefühl des Dokumentierenden oder c) auf einer objektiven Berechnung beruhen.

Es liegt nahe, die Schwere der Rippe einer Glocke anhand ihrer Masse zu bestimmen. Weil wir damit aber schon absolute Festlegungen treffen müssten, stellen wir diese Aufgabe vorerst zurück und betrachten zunächst die relativen Verhältnisse, die sich ausdrücken lassen durch die Frage: Was unterscheidet eine schwere Rippe von einer mittleren? Fast alle Rippentabellen implizieren folgende Definition:

> *Die Rippe einer Glocke ist dann schwer, wenn sie denselben Durchmesser hat wie eine Glocke mittlerer Schwere, aber einen Halbton höher klingt.*

Selbstverständlich lässt sich ebenso auch eine leichte Rippe definieren:

> *Die Rippe einer Glocke ist dann leicht, wenn sie denselben Durchmesser hat wie eine Glocke mittlerer Schwere, aber einen Halbton tiefer klingt.*

Man kann diese Definition sinngemäß auch ausweiten auf sehr schwere und sehr leichte Rippen, die dann zwei Halbtöne höher bzw. tiefer klingen. Vorstehende Definition enthält nur die beiden Größen Durchmesser d und Frequenz f, deren Produkt $d \cdot f$ bei ein und derselben Rippe einen konstanten Wert hat, sofern die Rippentabelle weder degressiv, noch progressiv ist. Diese Erkenntnis ist nicht neu, sie drückt aus, was den Gießern schon vor Jahrhunderten bekannt war: Das Verhältnis der Durchmesser eines zu gießenden Glockenpaars entspricht dem Intervallverhältnis (z. B. 3:4 für eine Quarte). Für unsere Zwecke ist nun bedeutsam, dass der Wert dieses Produktes $d \cdot f$ direkt als Maß für die Schwere der Rippe verwendet werden kann. Es lässt sich damit auch schnell überprüfen, ob eine Rippentabelle degressiv oder progressiv ist, oder nicht.

Weil nun das Frequenzverhältnis für einen temperierten Halbton $2^{\frac{1}{12}}$ beträgt, lässt sich obige Definition auch folgendermaßen formulieren:

Die Rippe einer Glocke ist dann schwer, wenn das Produkt aus Durchmesser und Nominalfrequenz den $2^{\frac{1}{12}}$ *-fachen Wert hat wie dasselbe Produkt einer Glocke mittlerer Schwere.*

Dieser Satz wird durch nahezu alle Rippentabellen bestätigt, sofern man ggf. vorhandene Degressionen oder Progressionen berücksichtigt. Wenn man nun unterstellt, dass sich die Masse einer Glocke mit der 3. Potenz des Durchmessers ändert (doppelter Durchmesser → 8-fache Masse), also $m \sim d^3$ ist, dann ist auch das Produkt $m{\cdot}f^3$ ein Maß für die Schwere der Rippe. Für die Beziehung zwischen mittlerer und schwerer Rippe muss aber der Faktor zwangsläufig größer werden und zwischen $2^{\frac{3}{12}}$ und $2^{\frac{4}{12}}$ liegen. Eine statistische Untersuchung der Daten von 1200 Glocken hat gezeigt, dass sich mit $2^{\frac{3,\bar{6}}{12}}$ eine weitestgehende Übereinstimmung erreichen lässt.

Die Rippe einer Glocke ist dann schwer, wenn das Produkt $m{\cdot}f^3$ *den* $2^{\frac{3,\bar{6}}{12}}$ *-fachen Wert hat wie dasselbe Produkt einer Glocke mittlerer Schwere.*

Auch dieser Satz lässt sich durch viele Rippentabellen verifizieren. Die aus $d{\cdot}f$ und $m{\cdot}f^3$ gewonnenen Werte weisen einen Korrelationskoeffizienten von 0,99 auf, stimmen also häufig gut überein. Die Beurteilung der Rippenschwere durch $m{\cdot}f^3$ ist übrigens genau dasselbe wie die Umrechnung der Masse einer Glocke mit Hilfe des Frequenzverhältnisses auf einen gegebenen Ton, üblicherweise c^1. Man braucht nur $m{\cdot}f^3$ durch $f^3(c^1)$ zu dividieren und erhält die äquivalente Masse m' einer c^1-Glocke derselben Rippenschwere, so dass die Angaben $m{\cdot}f^3$ und $m'(c^1)$ völlig gleichwertig sind.

Wenn auch manch Sachkundiger jetzt die Stirn runzeln wird: Das oftmals zur Bestimmung der Rippenschwere propagierte Verhältnis der Schlagringstärke zum Durchmesser (z. B. 1:14) ist als Maß für die Rippenschwere völlig ungeeignet. Der Korrelationskoeffizient der Werte s/d beträgt nur 0,5 zu den Werten $d{\cdot}f$ oder $m{\cdot}f^3$, so dass der Einfluss der relativen Schlagringstärke auf die Rippenschwere nicht mehr als 25% beträgt. Schließlich sei der Vollständigkeit halber noch eine weitere Größe eingeführt, die auch ein potentieller Kandidat zur Beurteilung der Rippenschwere wäre: Kombiniert man die Größen $d{\cdot}f$ und $m{\cdot}f^3$, so erhält man eine virtuelle Dichte m/d^3, d. h. die durchschnittliche Dichte eines Würfels mit der Kantenlänge d und der Masse m der Glocke, was auf den ersten Blick recht verlockend erscheint, führt doch eine Erhöhung der Masse bei gleich bleibendem Durchmesser der Glocke zu einer schwereren Rippe. Allerdings ist die Korrelation der Werte m/d^3 mit 0,5 für unsere Zwecke ebenfalls nicht gut genug. Stellen wir die genannten Größen hinsichtlich ihrer Eignung zur Beurteilung der Rippenschwere einander gegenüber,

$d{\cdot}f$	sehr gut
$m{\cdot}f^3$	sehr gut bei hinreichend genauer Massenbestimmung (Wägung)
m/d^3	schlecht
s/d	schlecht

so ist verständlich, dass in den weiteren Ausführungen nur die beiden erstgenannten Produkte berücksichtigt werden. Wir wollen einmal überschlägig ihre Fehler abschätzen und betrachten dazu eine fiktive g^1 mit 1 m Durchmesser und einer Masse von 650 kg. Die Frequenzbestimmung mit einer maximalen Abweichung von 1 HT/16 führt zu einem Fehler von 0,36%, der sich bei Potenzierung mit 3 auf 1,08% verdreifacht. Wenn der Durchmesser auf 1 mm genau bestimmt wurde, haben wir einen Fehler von 0,1%, so dass unser Produkt $d{\cdot}f$ einen Fehler von

0,46% aufweist. Wiegen wir die Masse mit einem maximalen Fehler von 1 kg, so beträgt dieser Fehler 0,15%, woraus sich für $m{\cdot}f^3$ ein Fehler von 1,23% ergibt, immerhin rund das Dreifache des Fehlers von $d{\cdot}f$. Wird die Masse nicht durch Wägung bestimmt, sondern nur geschätzt, so müssen wir auch die Genauigkeit unserer Massenschätzung abschätzen, z. B. ±20 kg, womit sich ein Fehler von 4,16% für $m{\cdot}f^3$ oder alternativ für $m'(c^1)$ ergibt, was das Neunfache des Fehlers von $d{\cdot}f$ ist.

Wenn man nun versucht, die Rippenschwere durch absolute Zahlenwerte zu fixieren, dann ergibt sich ein gewisses Problem dadurch, dass im Laufe des vergangenen Jahrhunderts ein deutlicher Trend zu – absolut betrachtet – schwereren Rippen zu erkennen ist. Nicht umsonst hat der Beratungsausschuss in den Limburger Richtlinien [3] Mindestwerte für die Rippenschwere in Form von Mindestmassen für c^1 vorgeschrieben, und zwar

leichte Rippe	mindestens 1700 kg
mittelschwere Rippe	mindestens 2100 kg
schwere Rippe	mindestens 2600 kg,

so dass eine Rippe, die heute als „leicht“ gilt, vor 100 Jahren noch oft als „normal“ oder „mittelschwer“ bezeichnet wurde. Wir müssen uns also darüber im Klaren sein, dass der heute angelegte Maßstab mit in historischen Rippentabellen anzutreffenden Bezeichnungen kollidieren wird. Um nun das gesamte Zahlengebäude der Rippenschwere zu fixieren, benötigt man nur einen einzigen Zahlenwert, nämlich die Masse einer ideal mittelschweren c^1-Glocke. Alle anderen Werte ergeben sich aus physikalischen oder statistischen Zusammenhängen. Nimmt man als dieses Zentrum des mittelschweren Bereichs die Mitte des Intervalls von 2100 kg bis 2600 kg, so ergibt sich eine Masse von 2340 kg. Dieser Wert soll in den folgenden Ausführungen als Basis dienen. Die damit gewonnenen mittleren Werte der jeweiligen Bereiche der Rippenschwere zeigt folgende Tabelle:

	$d{\cdot}f$	$m{\cdot}f^3$	$m'(c^1)$
	m·Hz	kg·(kHz)^3	kg
sehr leicht	357,8	26,51	1532
leicht	379,0	32,76	1893
mittel	401,6	40,49	**2340**
schwer	425,5	50,04	2892
sehr schwer	450,8	61,85	3574

Die in den Spalten enthaltenen Werte stellen geometrische Folgen dar, so dass es nahe liegt, diese auf die mittleren Werte zu normieren und so zu logarithmieren, dass sich ein dimensionsloser Koeffizient *r* der Rippenschwere nach folgendem Schema ergibt:

sehr leicht	-2
leicht	-1
mittel	0
schwer	1
sehr schwer	2

Wir erreichen dieses durch folgende Operationen:

$$r_d = 12 \cdot \frac{\ln \frac{d \cdot f}{401{,}6}}{\ln 2} \quad \text{mit } d \text{ in m und } f \text{ in Hz} \qquad (1)$$

$$r_m = \frac{36}{11} \cdot \frac{\ln \dfrac{m \cdot f^3}{40{,}49}}{\ln 2} \quad \text{mit } m \text{ in kg und } f \text{ in kHz} \qquad (2)$$

Gemäß dem Fehlerfortpflanzungsgesetz ergeben sich die Fehler der Rippenschwere *r* zu

$$\sigma(r_d) = 12 \cdot \frac{\mu(d \cdot f)}{\ln 2} \qquad (3)$$

$$\sigma(r_m) = \frac{36}{11} \cdot \frac{\mu(m \cdot f^3)}{\ln 2} \quad , \qquad (4)$$

worin σ der absolute Fehler von *r* und μ der relative Fehler (Prozentzahl : 100) des jeweiligen Produkts ist.

Im Idealfall sind die Werte r_d und r_m identisch, was aber nur selten vorkommt, meist weichen sie ein wenig voneinander ab. Es lässt sich abschließend ein gewichteter Mittelwert gemäß

$$r = \frac{p_d \cdot r_d + p_m \cdot r_m}{p_d + p_m} \qquad (5)$$

bilden, wobei man die Gewichte p_d und p_m aus den oben beschriebenen Fehlern von $d \cdot f$ und $m \cdot f^3$ gewinnt, indem man $p = 1/\sigma^2$ setzt. Falls die Rundung von r_d und r_m schon zum selben Ergebnis führt, erübrigt sich selbstverständlich die Mittelwertbildung.

Die Daten von vier realen Glocken mögen den ausführlichen Rechengang verdeutlichen:

Mühlhausen, Divi Blasii I (1345), ces^1 +6

f = 249,481 Hz ± 1 HT/16	d = 1909 mm ± 1 mm	m = 5500 kg ± 100 kg
f = 249,481 Hz ± 0,36%	d = 1909 mm ± 0,05%	m = 5500 kg ± 1,82%
$d \cdot f$ = 476,3 Hzm ± 0,41%	$m \cdot f^3$ = 85,40 kg(kHz)^3 ± 2,90%	
r_d = 2,953 ± 0,072	r_m = 3,524 ± 0,137	
$p_d = 1/0{,}072^2$ = 195	$p_m = 1/0{,}137^2$ = 53	

<u>r = 3,1</u>

Gummersbach-Dieringhausen, Herz Jesu I (1934), f^1 +2

f = 347,762 Hz ± 1 HT/16	d = 1170 mm ± 1 mm	m = 1009 kg ± 1 kg
f = 347,762 Hz ± 0,36%	d = 1170 mm ± 0,09%	m = 1009 kg ± 0,10%
$d \cdot f$ = 406,9 Hzm ± 0,45%	$m \cdot f^3$ = 42,44 kg(kHz)^3 ± 1,18%	
r_d = 0,227 ± 0,077	r_m = 0,221 ± 0,056	
$p_d = 1/0{,}077^2$ = 167	$p_m = 1/0{,}056^2$ = 320	

<u>r = 0,2</u> *(Hier hätte man auf die Bildung des Mittelwerts verzichten können.)*

Kaarst, St. Martin V (1960), b^1 +6

f = 470,958 Hz ± 1 HT/16	d = 817 mm ± 1 mm	m = 320 kg ± 10 kg
f = 470,958 Hz ± 0,36%	d = 817 mm ± 0,12%	m = 320 kg ± 3,13%
$d \cdot f$ = 384,8 Hzm ± 0,48%	$m \cdot f^3$ = 33,43 kg(kHz)^3 ± 4,21%	
r_d = -0,740 ± 0,084	r_m = -0,905 ± 0,199	
$p_d = 1/0{,}084^2$ = 142	$p_m = 1/0{,}199^2$ = 25	

<u>r = -0,8</u>

Kerpen-Götzenkirchen, St. Cyriak I (1954), c^2 -6
f = 506,220 Hz ± 1 HT/16 d = 734 mm ± 1 mm m = 230 kg ± 10 kg
f = 506,220 Hz ± 0,36% d = 734 mm ± 0,14% m = 230 kg ± 4,35%
$d \cdot f$ = 371,6 Hzm ± 0,50% $m \cdot f^3$ = 29,84 kg(kHz)^3 ± 5,43%
r_d = -1,345 ± 0,086 r_m = -1,442 ± 0,257
p_d = 1/0,086^2 = 135 p_m = 1/0,257^2 = 15
$\underline{r = -1{,}4}$

Weil der Koeffizient r eine logarithmische Größe ist, sollte sein Wert nur mit einer oder höchstens zwei Nachkommastellen angegeben werden.

Das vorgestellte Verfahren bietet somit die Möglichkeit, die Schwere einer Rippe sehr anschaulich, stufenlos, objektiv und absolut darzustellen. Die Zuordnung der Wertebereiche zu sprachlichen Formulierungen zeigt folgende Tabelle:

r	$d \cdot f$	$m \cdot f^3$	$m'(c^1)$
extrem leicht			
-2,5	347,6	23,85	1378
sehr leicht			
-1,5	368,3	29,47	1703
leicht			
-0,5	390,2	36,42	2105
mittel			
+0,5	413,4	45,02	2601
schwer			
+1,5	437,9	55,63	3215
sehr schwer			
+2,5	464,0	68,76	3973
extrem schwer			

Eine derart scharfe sprachliche Abgrenzung ist allerdings in vielen Fällen nicht sinnvoll, so dass man beispielsweise die Rippe einer Glocke mit r = 0,6 auch „mittel bis schwer“ nennen könnte oder bei einem Geläut eines Gießers, der eine degressive Rippe verwendet hat, auch -0,6 ggf. noch als „mittel“ anzusehen wären, wenn die übrigen Glocken eine Rippe mittlerer Schwere aufweisen. Der Rippenkoeffizient r braucht eigentlich gar keine zugeordnete sprachliche Formulierung mehr.

Abschließend sei denjenigen, die der hier entbehrlich gewordenen relativen Schlagringstärke s/d nachtrauern, noch ein Trost geboten: Den obigen Formalismus der Normierung und Logarithmierung kann man auch auf s/d anwenden. Man erhält mit

$$r_S = 6{,}9 \cdot \frac{\ln(13{,}59 \cdot s/d)}{\ln 2} \qquad (6)$$

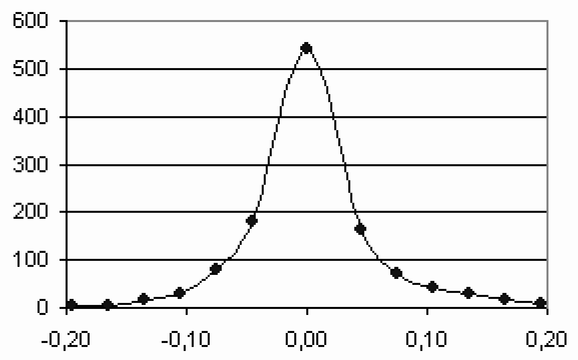
einen Koeffizienten der Schlagringstärke, der analog zur Rippenschwere bei einem leichten Schlagring den Wert -1, bei einem schweren den Wert +1 annimmt. Dass die beiden Koeffizienten r und r_S deutlich voneinander abweichen können, zeigt uns ein prominentes Beispiel: Die Werte der Speciosa (1449) des Kölner Doms betragen r = 1,5 und r_S = -0,4.

Exkurs: Beinahe eine „Glockenkonstante“

Setzt man die Werte nach (1) und (2) einander gleich, so folgt daraus der bemerkenswerte Zusammenhang

$$\frac{m}{d^{\frac{11}{3}} \cdot f^{\frac{2}{3}}} \approx \text{const.} \qquad (7)$$

Die Gleichung gibt keine strenge Gesetzmäßigkeit im Sinne einer universell gültigen Glockenkonstanten an, sondern dieser Wert unterliegt anscheinend einer Normalverteilung. Bei der statistischen Untersuchung von 1200 Glocken ergab sich mit den zugeschnittenen Größen m/kg, d/m und f/Hz ein Mittelwert von 11,42. Folgendes Diagramm zeigt die Verteilung dieser Werte (die Abszisse ist relativ skaliert):



Die Hälfte der 1200 Glocken lag in einem Intervall von ±3,5% um den Mittelwert 11,42, und 90% der Glocken lagen in einem Intervall von ±11%. Damit besteht die Möglichkeit, im Rahmen der gegebenen Toleranz die Masse einer Glocke aus Durchmesser und Nominalfrequenz zu bestimmen.

Die letzte Aktualisierung dieses Textes erfolgte am 25.03.2007.
Er kann über http://www.grabinski-online.de/ abgerufen werden.

Literatur:

[1] Karl Walter, Glockenkunde, Regensburg 1913
[2] Weißenbäck/Pfundner, Tönendes Erz, Graz 1961
[3] Limburger Richtlinien [1951], in: Glocken in Geschichte und Gegenwart, Bd. 1, Karlsruhe 1986, S. 263-268